

DIFFERENZIALGLEICHUNGEN: Übung 1

Die Aufgaben sind ohne Taschenrechner zu lösen!

1. Bringe die DGL auf die Form $y' = g_1(x, y)$ bzw. $y'' = g_2(x, y, y')$:

a) $x \cdot y' = x + y$ b) $x \cdot y' - y' = x + y'$ c) $y + xy' + x^2 y'' = x^3$ d) $yy'' - (y')^2 = xy''$

2. Zeige, dass die Funktionen f mit $y = f(x)$ Lösungen der angegebenen DGL sind:

a) $f(x) = x + C e^{-x}$, $y' = x - y + 1$ b) $f(x) = \frac{1}{x}(C - \cos x)$, $xy' + y = \sin x$

c) Zeige, dass $f(x) = Cx^3 - x^2$ die DGL $y' = \frac{3y}{x} + x$ erfüllt und bestimme die Konstante C , so dass die Anfangsbedingung $y(1) = 2$ erfüllt ist.

3. Ermittle die (speziellen) Lösungen der folgenden DGL mit den gegebenen Anfangsbedingungen (AB):

a) $y' = -2x + 1$ b) $y' = \frac{1}{x+1}$ c) $y' = \sqrt{x}$ d) $y' = \sin(2x)$
 $y(0) = 0$ $y(0) = 1$ $y(9) = 4$ $y(\frac{\pi}{4}) = 0$

4. a) Bestimme die Gleichungen der Isoklinenscharen der folgenden DGL:

1) $y' = x - y$ 2) $2yy' = x$ 3) $y'x + y = 0$ 4) $y' = e^{x-y}$

b) Skizziere die Richtungsfelder der DGL und die Lösungskurven zu den gegebenen AB.

1) $y(0) = 1$ 2) $y(0) = 1$ 3) $y(1) = 1$ 4) $y(1) = 0$

5. Berechne mit Hilfe des Euler-Verfahrens im Intervall $[0;2]$ eine Näherung für die Lösung der DGL $y' = x + y$, wenn $y(0) = 1$ ist und die Schrittweite 0.5 beträgt.

Lösungen

1. a) $y' = \frac{x+y}{x}$ b) $y' = \frac{x}{x-2}$ c) $y'' = -\frac{y}{x^2} - \frac{y'}{x} + x$ d) $y'' = \frac{-(y')^2}{x-y}$

2. a) $y' = f'(x) = 1 - C e^{-x} \Rightarrow 1 - C e^{-x} \equiv x - (x + C e^{-x}) + 1 \quad \checkmark$

b) $y' = f'(x) = \frac{1}{x} \sin x - \frac{1}{x^2}(C - \cos x) \Rightarrow x \left(\frac{1}{x} \sin x - \frac{1}{x^2}(C - \cos x) \right) + \frac{1}{x}(C - \cos x) \equiv \sin x \quad \checkmark$

c) $y' = f'(x) = 3Cx^2 - 2x \Rightarrow 3Cx^2 - 2x \equiv \frac{3(Cx^3 - x^2)}{x} + x \quad \checkmark \quad y(1) = 2 \Rightarrow C = 3$

3. a) $y = -x^2 + x + C$ b) $y = \ln(x+1) + C$ c) $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$ d) $y = -\frac{1}{2}\cos(2x) + C$
 $y(0) = 0 \Rightarrow C = 0$ $y(0) = 1 \Rightarrow C = 1$ $y(9) = 4 \Rightarrow C = -14$ $y(\frac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow C = 0$
 $\Rightarrow y = -x^2 + x$ $\Rightarrow y = \ln(x+1) + 1$ $\Rightarrow y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 14$ $\Rightarrow y = -\frac{1}{2}\cos(2x)$

4. 1) $c = x - y$ 2) $2yc = x$ 3) $cx + y = 0$ 4) $c = e^{x-y}$
 $y = x - c$ $y = \frac{x}{2c}$ $y = -cx$ $y = x - \ln c$

5.

x	0	0.5	1	1.5	2
y	1	1.5	2.5	4.25	7.125
y'	1	2	3.5	5.75	9.125