DIFFERENZIALGLEICHUNGEN: Kurztheorie

1. Grundlagen

Eine Differenzialgleichung (DGL) enthält nebst *unabhängigen* Variablen (z.B. x) auch *abhängige* Variablen (z.B. y hängt von x ab) und Ableitungen von y (z.B. y', y'', etc.).

Beispiele:

1. $y' = x + y$ (DGL 1. Ordnung enthält 1. Ableitungen, aber nicht höhere) allgemein: $y' = g_1(x, y)$
2. $y'' = y$ (DGL 2. Ordnung enthält 2. Ableitungen, aber nicht höhere) allgemein: $y'' = g_2(x, y, y')$

Eine DGL (exakt) lösen, heisst: Eine Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x)$ finden, welche die DGL erfüllt, d.h. durch Einsetzen von $f(x)$ und der Ableitungen wird die DGL für jedes x erfüllt.
Die Menge aller Lösungen für $f(x)$ heisst auch *allgemeine* Lösung.

Beispiel:

3. $y' = \frac{1}{2}x$ wird erfüllt durch $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + C$, wobei C eine Konstante ist.
   Durch die Gleichung $y = \frac{1}{4}x^2 + C$ wird eine Kurvenschar beschrieben.

Soll eine Lösung bestimmt werden, welche eine Anfangsbedingung $y_0 = f(x_0)$ erfüllt, spricht man von einer *speziellen* Lösung, bzw. von einer Scharkurve. Zu diesem Zweck muss die Konstante C bestimmt werden.

2. Einige Beispiele von Anwendungen

- Exponentielles Wachstum: $y' = k \cdot y$
- Logistisches Wachstum: $y' = k \cdot \left(1 - \frac{y}{S}\right) \cdot y$
- Räuber-Beute-Problem (Lotka-Volterra-Modell):
  (System mit 2 DGL)
  $y_1' = a \cdot y_1 - c \cdot y_1 \cdot y_2$
  $y_2' = d \cdot y_1 \cdot y_2 - e \cdot y_2$
- Ausbreitung einer ansteckenden Krankheit (S-I-R-Modell):
  (System mit 3 DGL)
  $S' = -a \cdot S \cdot I$
  $I' = a \cdot S \cdot I - b \cdot I$
  $R' = b \cdot I$
- Freier Fall ohne Luftwiderstand: $v' = g$
- Freier Fall mit Luftwiderstand: $v' = g + k \cdot v$
- Abkühlungsgesetz (Newton): $T' = k \cdot (T - T_0)$
- Ausflussgesetz (Torricelli): $y' = -k\sqrt{y}$

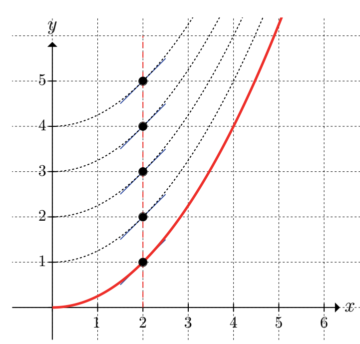
3. Näherungsverfahren zur Lösung

3.1 Richtungsfeld einer DGL

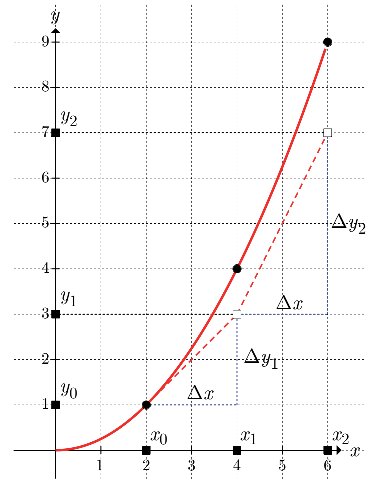
Um eine ungefähre Vorstellung der Lösungen einer DGL von der Form $y' = g(x, y)$ zu bekommen, kann man für jedes Paar (x, y) die Tangentensteigung $m = y' = g(x, y)$ einer Lösungskurve berechnen und ein sog. *Richtungsfeld* zeichnen. Eine Lösungskurve "passt" dann in das Richtungsfeld.

Hilfreich sind dabei oft auch Linien gleicher Steigung (*Isoklinen*).

Beispiel: $y' = \frac{1}{2}x$ mit Isokline $x = 2$ und $y(0) = 0$.



3.2 Das Euler-Verfahren



Um eine spezielle Näherungslösung einer DGL von der Form $y' = g(x, y)$ durch (x_0, y_0) zu bekommen, ersetzt man den Differenzenquotienten $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ näherungsweise durch die Ableitung $y' = g(x, y)$, welche aus der DGL bekannt ist.

Ausgehend vom Wertepaar (x_0, y_0) wird eine Folge von Wertepaaren (x_i, y_i) auf folgende Art bestimmt:

$g(x_i, y_i) = \dfrac{\Delta y_{i+1}}{\Delta x} = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}$, womit die Rekursion
$x_{i+1} = x_i + \Delta x$, $y_{i+1} = y_i + \Delta y_{i+1} = y_i + g(x_i, y_i) \cdot \Delta x$ bestimmt ist.

Beispiel: $y' = \frac{1}{2}x$ durch $(2, 1)$ mit $g(x, y) = \frac{1}{2}x$ und $\Delta x = 2$

4. Exakte Lösungsverfahren

4.1 Separierbare DGL

Kann man eine DGL auf die Form $y' = \dfrac{g(x)}{h(y)}$ bringen, heisst sie *separierbar*.

Mit Differenzialen kann man schreiben:	$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{g(x)}{h(y)}$	
Separieren der Variablen:	$h(y)\,\mathrm{d}y = g(x)\,\mathrm{d}x$	
Beide Seiten integrieren:	$\int h(y)\,\mathrm{d}y = \int g(x)\,\mathrm{d}x$	
Stammfunktionen angeben:	$H(y) = G(x) + C$	(mit Integrationskonstante C)
Nach y auflösen:	$y = f(x)$	(enthält Konstante C)

4.2 Lineare DGL 1. Ordnung

a) Homogene Gleichungen $\boxed{y' = g(x) \cdot y}$

Die DGL $y' = g(x) \cdot y$ ist ein Sonderfall einer sep. DGL und heisst auch *homogene lineare* DGL 1. Ordnung.

Ihre allgemeine Lösung kann durch das obige Verfahren ermittelt werden und lautet: $\boxed{y = c \cdot e^{G(x)}}$, wobei c eine Konstante und G eine Stammfunktion von g ist.

b) Inhomogene Gleichungen $\boxed{y' = g(x) \cdot y + h(x)}$

Die DGL $y' = g(x) \cdot y + h(x)$ heisst *inhomogene lineare* DGL 1. Ordnung mit dem inhomogenen Term $h(x)$. Inhomogene DGL sind leider nicht separierbar!

Der Ansatz $y = c \cdot e^{G(x)}$ führt nur zum Ziel, wenn c als Funktion von x geschrieben wird (*Variation der Konstanten* c), also $y = c(x) \cdot e^{G(x)}$.

Mit diesem Ansatz erhält man die allgemeine Lösung: $\boxed{f(x) = \left(\int h(x) \cdot \mathrm{e}^{-G(x)}\,\mathrm{d}x\right) \cdot \mathrm{e}^{G(x)}}$

Beispiel:

4. $y' = y + x$ ist eine inhomogene lineare DGL mit $g(x) = 1$ und $h(x) = x$.
   Ihre allgemeine Lösung lautet: $f(x) = C \cdot \mathrm{e}^x - x - 1$.
   Die spezielle Lösung durch $(x, y) = (0, 1)$ ergibt $C = 2$ und damit $f(x) = 2 \cdot \mathrm{e}^x - x - 1$.

5. Lineare DGL 2. Ordnung

Allgemeiner Fall einer *linearen inhomogenen* DGL 2. Ordnung: $\boxed{y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)}$

Eine bestimmte Lösung dieser Differenzialgleichung nennen wir eine *partikuläre* Lösung.

Wesentliche Sonderfälle

- homogene DGL: $\boxed{y'' + a(x)y' + b(x)y = 0}$
- Inhomogene DGL mit konstanten Koeffizienten a und b: $\boxed{y'' + ay' + by = c(x)}$
- Inhomogene DGL mit konstanten Koeffizienten a, b und c: $\boxed{y'' + ay' + by = c}$
- Homogene DGL mit konstanten Koeffizienten a und b: $\boxed{y'' + ay' + by = 0}$

Grundlegende Sätze

1. Die allgemeine Lösung einer linearen inhomogenen DGL 2. Ordnung ist gleich der Summe aus der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen DGL und einer beliebigen partikulären Lösung der inhomogenen DGL.

2. Zwei partikuläre Lösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ sind genau dann voneinander unabhängige (Basis-)Lösungen einer homogenen DGL, wenn die Bedingung ${y_1}'(x) \cdot y_2(x) - {y_2}'(x) \cdot y_1(x) \neq 0$ erfüllt ist.

3. Sind y_1 und y_2 Basislösungen der homogenen DGL, so lautet die allgemeine Lösung der homogenen DGL $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

a) Lösen einer homogenen Gleichung vom Typ $\boxed{y'' + ay' + by = 0}$

Der Ansatz $y(x) = \mathrm{e}^{rx}$ ist sicher geeignet und liefert durch Einsetzen in die DGL die sogenannte *charakteristische* Gleichung $\boxed{r^2 + ar + b = 0}$, so dass wir eine quadratische Gleichung für r bekommen.

Welches sind in diesen Fällen die Basislösungen?

1. Fall: Die Gleichung hat zwei reelle Lösungen r_1 und r_2: $\boxed{y_1(x) = \mathrm{e}^{r_1 x} \text{ und } y_2(x) = \mathrm{e}^{r_2 x}}$

2. Fall: Die Gleichung hat eine reelle (Doppel-)Lösung r: $\boxed{y_1(x) = \mathrm{e}^{rx} \text{ und } y_2(x) = x \cdot \mathrm{e}^{rx}}$

3. Fall: Die Gleichung hat konj. kompl. Lösungen r_1 und r_2:
$r_1 = u + \mathrm{i}v$ und $r_2 = u - \mathrm{i}v$ $\boxed{y_1(x) = \mathrm{e}^{ux}\sin(vx) \text{ und } y_2(x) = \mathrm{e}^{ux}\cos(vx)}$

b) Lösen einer inhomogenen Gleichung vom Typ $\boxed{y'' + ay' + by = c(x)}$

Falls man eine partikuläre Lösung $p(x)$ dieser DGL gefunden hat, ist $\boxed{y(x) = p(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)}$ die allgemeine Lösung.
$p(x)$ kann im Prinzip durch Variation der Konstanten $C_1 = C_1(x)$ und $C_2 = C_2(x)$ gefunden werden, aber oft hilft ein geeigneter Ansatz, den man z.B. aus einer Tabelle bezieht.

Beispiel: $\boxed{y'' + 2y' - 3y = 4x}$ Homogene L.: $y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-3x} + C_2\,\mathrm{e}^{x}$, Ansatz: $p(x) = Ax + B$

$p''(x) + 2p'(x) - 3p(x) = 4x \Rightarrow 2(A) - 3(Ax + B) = 4x \Rightarrow 2A - 3B = 0,\ -3Ax = 4x \Rightarrow A = -\frac{4}{3},\ B = -\frac{8}{9}$

$\Rightarrow \boxed{y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-3x} + C_2\,\mathrm{e}^{x} - \frac{4}{3}x - \frac{8}{9}}$